MPSI 2024/2025 | DS n°11 (2h)

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

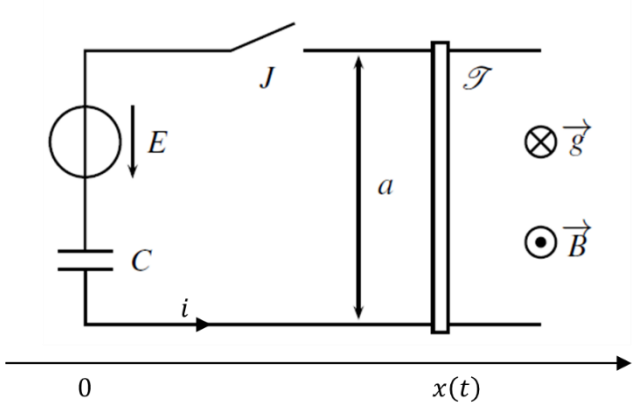
La calculatrice est autorisée

Consignes à suivre :

- Soigner la rédaction. Numéroter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.

I - Tige qui glisse sur un circuit capacitif

Une tige conductrice $\mathcal{T}$ glisse sur deux rails horizontaux distants de a. Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur J, un condensateur de capacité C et un générateur de f.é.m. constante E. $\mathcal{T}$ a une résistance électrique R (la résistance du reste du circuit est négligée) et une masse m. L'auto-inductance du circuit sera négligée. L'ensemble est plongé dans des champ magnétique et de pesanteur uniformes et stationnaires. On ferme à l'instant initial l'interrupteur J alors que la tige $\mathcal{T}$ est immobile et le condensateur déchargé. On négligera les frottements.



On exprimera les résultats en fonction des constantes du problème, ainsi que des paramètres introduits dans les questions qui précèdent (même si ces questions n'ont pas été traitées).

1) Établir une équation électrique et une équation mécanique décrivant le circuit.

2) Établir et intégrer une équation différentielle sur l'intensité du courant dans le circuit pour montrer qu'il s'écrit sous la forme : $i(t) = i_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$. Identifier les expressions de i_0 et τ.

3) En déduire que la vitesse $v(t)$ de la tige se met sous la forme : $v(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Exprimer v_0.

4) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_g$ fournie par le générateur entre les instants initial ($t = 0$) et final ($t \to \infty$).

5) Déterminer $u_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

6) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_c$ emmagasinée par le condensateur entre les instants initial et final.

7) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule entre les instants initial et final.

8) Calculer le travail W des forces de Laplace entre les instants initial et final.

9) Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{E}_g$, $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_J$ et W ? L'interpréter.

----------Fin de la partie I ----------

II - Détecteur de métaux

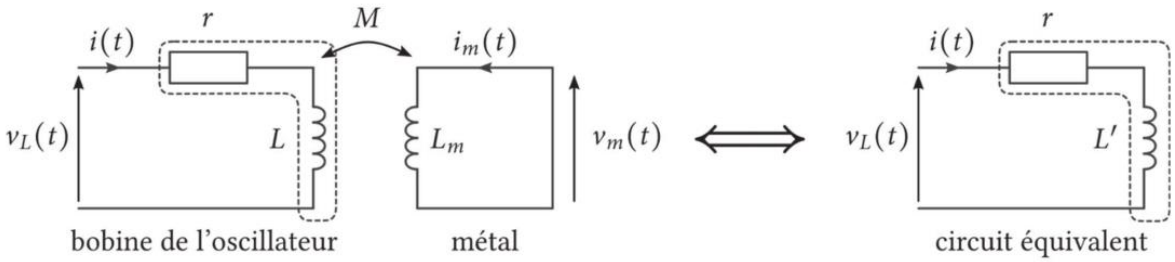
Un détecteur de métaux utilise deux oscillateurs (des circuits RLC) dont les fréquences d'oscillations sont identiques en l'absence d'objets à détecter. Chacun d'eux contient notamment une bobine dont le rôle sera différent selon le circuit. L'un des deux oscillateurs fonctionne comme émetteur. Sa fréquence d'oscillations f_r sert de référence et ne doit pas varier au cours de l'expérience. La bobine qu'il contient doit être tenue loin des objets à détecter. L'autre oscillateur fonctionne comme récepteur. La bobine qu'il contient réagit au champ magnétique induit par les courants de Foucault, ce qui provoque une variation de sa fréquence d'oscillations f_d par rapport au circuit de référence. La comparaison des fréquences $\Delta f = |f_r - f_d|$ des deux oscillateurs renseigne sur la détection d'un objet métallique.

On note f_r la fréquence fixe du circuit de référence et f_d la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations des oscillateurs sont identiques :

$$f_r = f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

10) Dans la pratique, peut-on concevoir deux oscillateurs de fréquences d'oscillations identiques ? Si oui expliquer pourquoi, si non, proposer une façon d'ajuster au mieux les fréquences.

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre L, on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée M. L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient L'.



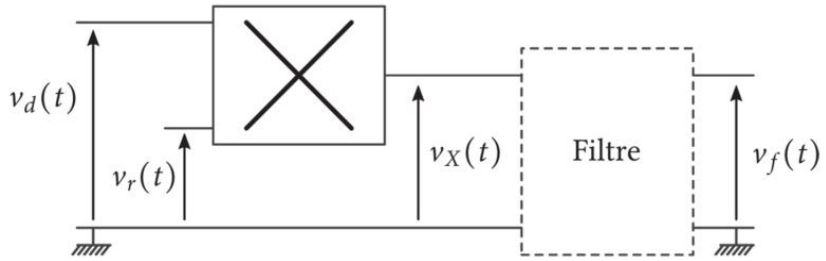
Circuit de détection équivalent en présence d'un métal

11) Écrire la loi des mailles dans chaque circuit. En déduire alors que l'ensemble {bobine de l'oscillateur et métal} est équivalent au {circuit équivalent} présenté ci-dessus (cf. figure, à droite), où :

$$L' = L\left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)$$

12) Déterminer la nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur lors de la détection d'un métal. Sachant que $M^2 \ll LL_m$, déterminer au premier ordre l'expression de $\Delta f = |f_r - f_d|$ en fonction de f_r, L, L_m et M.

On note respectivement $v_r(t) = v_{r0}\cos(2\pi f_r t)$ et $v_d(t) = v_{d0}\cos(2\pi f_d t)$ les tensions de chacun des oscillateurs respectivement de référence et de détection. Afin de déterminer la variation de fréquence, on utilise le montage de ci-dessous comprenant un multiplieur réalisant l'opération $v_X(t) = K\, v_d(t)\, v_r(t)$ (avec K une constante) et un filtre dont la nature est à déterminer.



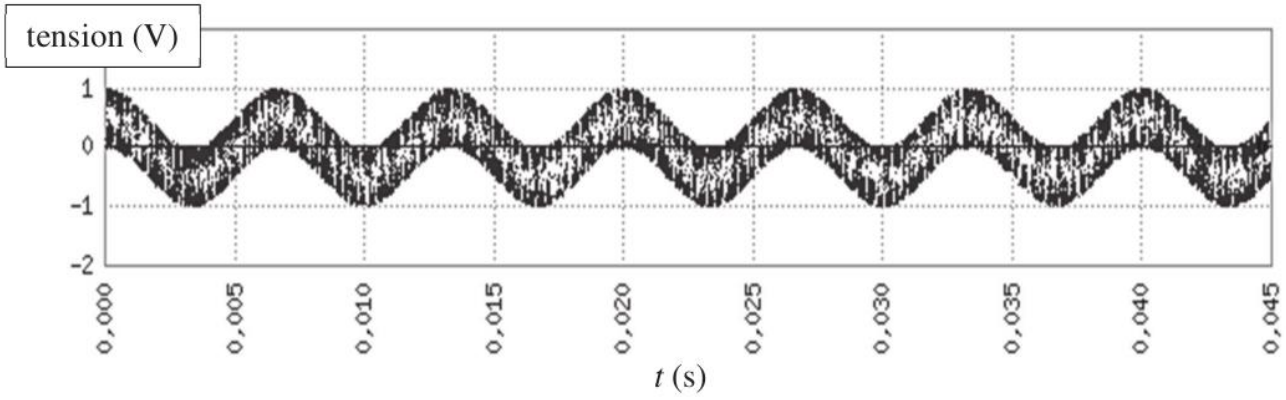
Rappel :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]$$

13) Établir l'expression de la tension $v_X(t)$ en sortie du multiplieur et représenter son spectre.

14) Sachant que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal permettant de déterminer Δf, proposer un filtre simple permettant d'isoler la composante pertinente du signal. Préciser comment choisir sa fréquence de coupure.

15) Lors d'une tentative de détection, le signal $v_X(t)$ suivant a été enregistré en sortie du multiplieur. En déduire l'écart entre les deux fréquences des oscillateurs et prévoir ce qui sera détecté en sortie du filtre.



----------Fin de la partie II ----------

III - Fonctionnement d'un capteur électromagnétique

On considère une boucle carrée PQMN. Les points P_1 et P_2 sont reliés à un voltmètre. On suppose que règne dans le demi-espace $x > 0$ un champ magnétique constant, $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_y$, tandis que le champ magnétique régnant dans le demi-espace $x < 0$ est nul : $\vec{B} = \vec{0}$.

La boucle carrée est animée d'un mouvement de translation à vitesse constante $\vec{v} = v_0\,\vec{e}_x$. Le segment MN, de longueur ℓ, se trouve dans le demi-espace $x > 0$ et le segment PQ dans le demi-espace $x < 0$. La position du circuit est définie par la position (x_C, y_C) de son centre C.

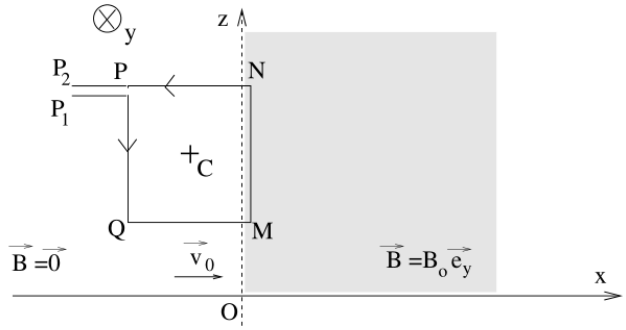


Figure 1

16) Donner l'expression du flux $\phi(t)$ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers ce circuit en fonction de l'abscisse $x_C(t)$. En déduire la valeur de la force électromotrice induite mesurée par le voltmètre, notée e.

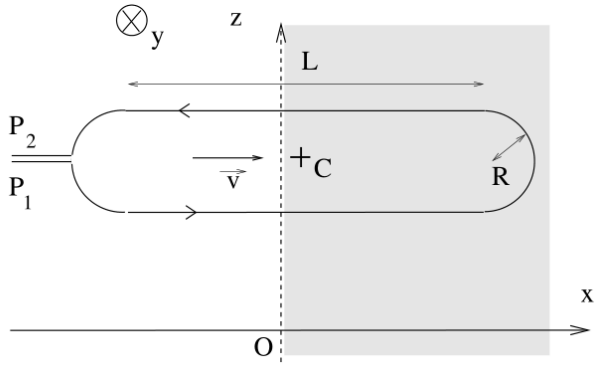


Figure 2

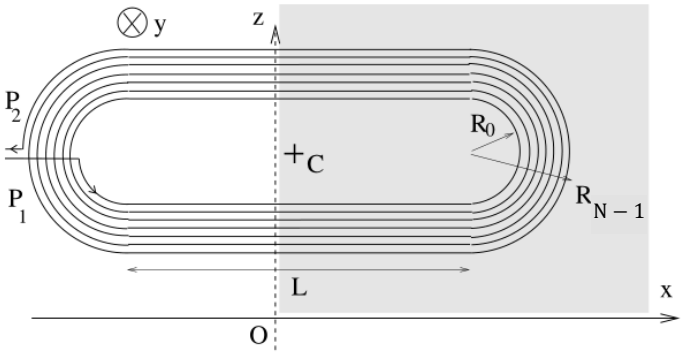


Figure 3

La boucle est désormais modélisée par un circuit constitué de deux portions rectilignes, de longueur L, fermées par deux portions semi-circulaires de rayon R (figure 2). On se limitera au cas où $|x_C| < L/2$.

17) Donner l'expression du flux $\phi(t)$ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers ce circuit en fonction de l'abscisse $x_C(t)$. En déduire la valeur de la force électromotrice induite mesurée par le voltmètre, notée e.

Pour augmenter la sensibilité du dispositif, il faut augmenter le flux magnétique traversant le circuit. On considère ainsi l'enroulement plan constitué de N boucles régulièrement espacées, de forme similaire au circuit précédent (figure 3). Les rayons intérieur et extérieur de l'enroulement sont notés R_0 et R_{N-1}. On a toujours $|x_C| < L/2$.

18) Donner l'expression du rayon R_k de la k-ième boucle, en fonction de k, N, R_0 et R_{N-1}. En déduire la valeur de la force électromotrice induite dans cette boucle, notée e_k. En déduire la force électromotrice mesurée par le voltmètre, notée e_{tot}.

---------- Fin de la partie III ----------